

Elektrotechnik – 6. Wechselstrom I

Luft- und Raumfahrttechnik Bachelor, 1. Semester

David Straub

6. Wechselstrom

1. Grundlegende Begriffe und Kennwerte
2. Komplexe Wechselstromrechnung
3. Wechselstromwiderstände (Impedanz, Admittanz)
4. Grundsaltungen
5. Leistung (Wirk-, Blind-, Scheinleistung)
6. Blindleistungskompensation
7. Resonanz und Frequenzverhalten

Wechselstrom: Grundlagen

Periodische Größen:

- Sich zeitlich wiederholende physikalische Größen
- Periodendauer $T \rightarrow u(t) = u(t + T)$
- Frequenz: $f = \frac{1}{T}$, Kreisfrequenz: $\omega = 2\pi f$

Wechselgrößen:

Periodische elektrische Größen mit verschwindendem arithmetischem Mittelwert

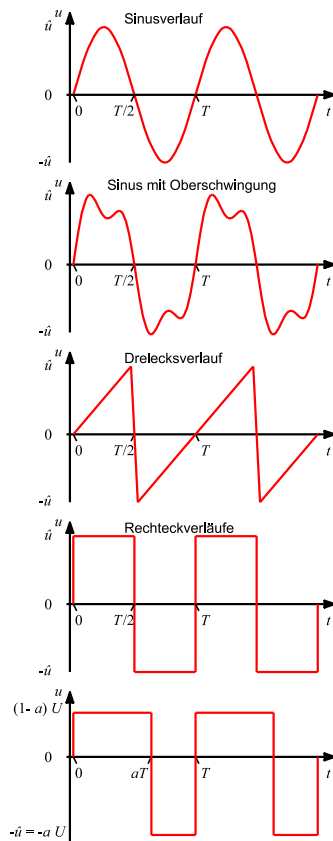


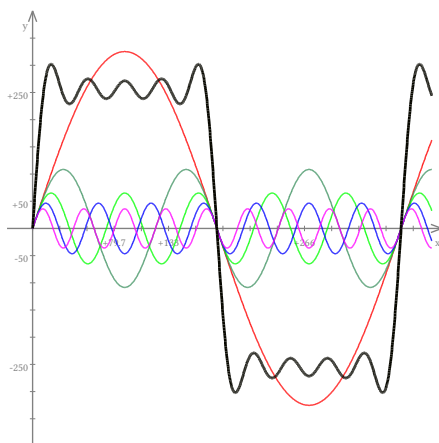
Abbildung 1: bg right:30% fit

Wechselgrößen: Eigenschaften

Fourier-Analyse: Jede Wechselgröße kann als Überlagerung von Sinusvorgängen dargestellt werden

$$a(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{A}_n \cdot \sin(n \cdot \omega t + \varphi_n)$$

→ Es genügt, **sinusförmige** Größen zu verstehen!



Arithmetischer Mittelwert

Definition:

$$\bar{a} = \frac{1}{T} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T} a(t) dt$$

Für sinusförmige Wechselgrößen $a(t) = \hat{A} \cdot \sin(\omega t + \varphi_a)$ gilt:

$$\bar{a} = 0$$

Gleichrichtwert

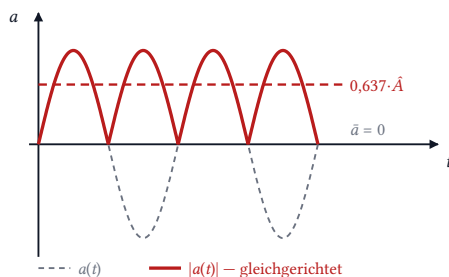
Definition:

$$\overline{|a|} = \frac{1}{T} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T} |a(t)| dt$$

Für sinusförmige Wechselgrößen:

$$\overline{|a|} = \frac{2}{\pi} \cdot \hat{A} \approx 0,637 \cdot \hat{A}$$

Anschaulich: der Mittelwert der **gleichgerichteten** Größe – das, was ein Gleichrichter aus der Wechselgröße macht.



Effektivwert: Definition

Physikalischer Hintergrund: derjenige Wert einer Wechselgröße, der in seiner Wirkung bei Energieumformung einem Gleichstrom entspricht:

$$W_{\text{el}} = I^2 \cdot R \cdot T \stackrel{!}{=} \int_0^T i^2(t) \cdot R dt \quad \Rightarrow \quad I_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt}$$

Allgemeine Definition (quadratischer Mittelwert, *RMS*):

$$A_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_{t_0}^{t_0+T} a^2(t) dt}$$

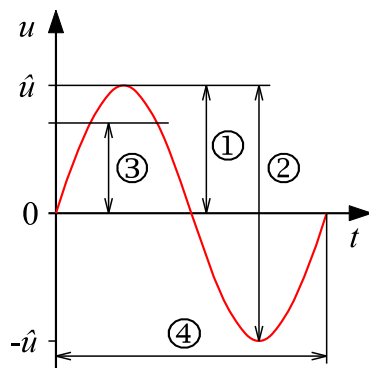
Effektivwert für Sinusschwingungen

$$A_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T \hat{A}^2 \cdot \sin^2(\omega t) dt} = \frac{\hat{A}}{\sqrt{2}} \approx 0,707 \cdot \hat{A}$$

Beispiele:

- Netzspannung: $U_{\text{eff}} = 230 \text{ V} \rightarrow \hat{U} = \sqrt{2} \cdot 230 \text{ V} = 325 \text{ V}$
- Haushaltssicherung: $I_{\text{eff}} = 16 \text{ A} \rightarrow \hat{I} = 22,6 \text{ A}$

Der Effektivwert wird von Messgeräten angezeigt!



Zusammenfassung: Kennwerte von Wechselgrößen

Kennwert	Formel	Für Sinusfunktion
Arithmetischer Mittelwert	$\bar{a} = \frac{1}{T} \int a(t) dt$	$\bar{a} = 0$
Gleichrichtwert	$\ a\ = \frac{1}{T} \int a(t) dt$	$\approx 0,637 \cdot \hat{A}$
Effektivwert	$A_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int a^2(t) dt}$	$\frac{\hat{A}}{\sqrt{2}} \approx 0,707 \cdot \hat{A}$

Notation ab jetzt: Kleinbuchstaben $u(t), i(t)$ = Zeitverläufe; $\hat{U}, \hat{I}$ = Amplituden; U, I (ohne Index!) = Effektivwerte



Aufgabe 17: Effektivwert

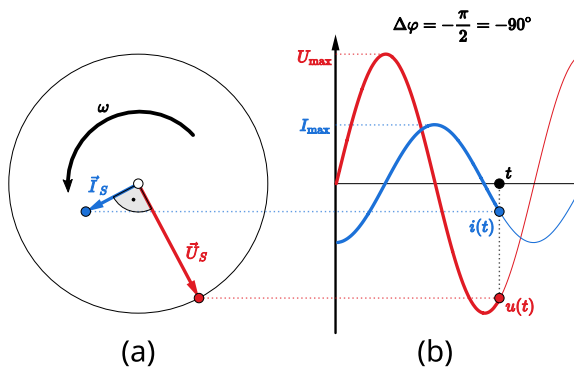
- Ein Oszilloskop zeigt eine sinusförmige Spannung mit Spitzenwert $\hat{U} = 17 \text{ V}$. Was zeigt ein Multimeter an?
- Eine Rechteckspannung springt periodisch zwischen $+10 \text{ V}$ und -10 V (je halbe Periode). Berechnen Sie den arithmetischen Mittelwert, den Gleichrichtwert und den Effektivwert **aus den Definitionen**.
- Warum gilt die Faustregel $A_{\text{eff}} = \hat{A}/\sqrt{2}$ hier nicht?

Zeigerdarstellung

Sinusförmige Wechselgrößen können als rotierende Zeiger in der komplexen Ebene dargestellt werden.

Zeigereigenschaften:

- Winkelgeschwindigkeit: $\omega = 2\pi f$
- Länge: Amplitude (oder Effektivwert, s.u.)
- Winkel zum Zeitpunkt $t = 0$: φ_u



Komplexe Zahlen: Grundlagen

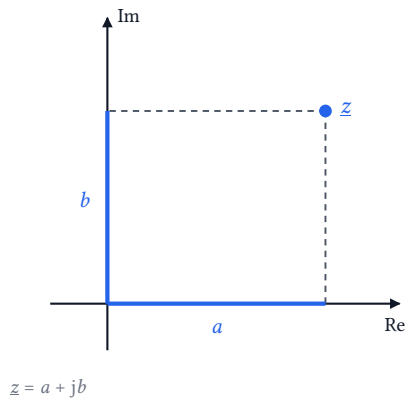
Imaginäre Einheit (in der Elektrotechnik als j notiert – i ist der Strom!):

$$j = \sqrt{-1}, \quad j^2 = -1$$

Komplexe Zahl:

$$\underline{z} = a + jb$$

mit Realteil $a = \text{Re } \underline{z}$ und Imaginärteil $b = \text{Im } \underline{z}$

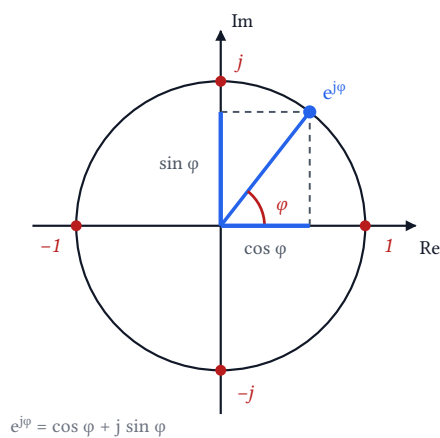


Euler'sche Formel

$$e^{j\varphi} = \cos(\varphi) + j \sin(\varphi)$$

Wichtige Spezialfälle (auswendig!):

- $e^{j0} = 1$
- $e^{j\pi/2} = j$
- $e^{j\pi} = -1$
- $e^{j3\pi/2} = e^{-j\pi/2} = -j$



Komplexe Darstellung

Anstatt mit trigonometrischen Funktionen zu rechnen, verwenden wir die Exponentialfunktion:

$$\underline{u}(t) = \hat{U} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_u)} = \underbrace{\hat{U} e^{j\varphi_u}}_{\text{Festzeiger } \underline{U}} e^{j\omega t}$$

Drehzeiger

Reale Zeitfunktion: $u(t) = \text{Re } \underline{u}(t) = \hat{U} \cdot \cos(\omega t + \varphi_u)$

Bei **einer** festen Frequenz rotieren alle Zeiger gleich schnell $\rightarrow$ der Faktor $e^{j\omega t}$ kürzt sich aus allen Gleichungen $\rightarrow$ wir rechnen nur mit **Festzeigern**!

Bezugsfunktion ist ab hier der Kosinus (er ist der Realteil von $e^{j\omega t}$). Sinusgrößen rechnet man um mit $\sin(x) = \cos(x - 90^\circ)$.

! Konvention: Amplituden- oder Effektivwertzeiger?

Zwei verbreitete Konventionen für die Zeigerlänge:

- **Amplitudenzeiger:** $\underline{U} = \hat{U} e^{j\varphi_u}$
- **Effektivwertzeiger:** $\underline{U} = U e^{j\varphi_u}$ mit $U = \hat{U} / \sqrt{2}$

In der Prüfung (und in der Energietechnik allgemein) sind **Effektivwertzeiger** üblich: „ $\underline{U} = U \cdot e^{j\varphi_u} = 8 \text{ V} \cdot e^{j\pi/2}$ (komplexer Effektivwert)“.

Für Impedanzen ist es egal (Quotient!) – für die **Leistung** nicht: $\underline{S} = \underline{U} \underline{I}^*$ gilt mit Effektivwertzeigern (mit Amplitudenzeigern: Faktor $\frac{1}{2}$).

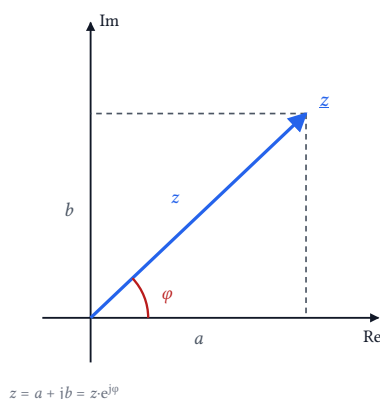
Darstellungsformen

Komponentenform (kartesisch): $\underline{z} = a + jb$

Polarform (Exponentialform): $\underline{z} = z \cdot e^{j\varphi}$

Umrechnung:

- Betrag: $z = \sqrt{a^2 + b^2}$
- Phase: $\varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$ (Quadrant prüfen!)
- Realteil: $a = z \cos \varphi$; Imaginärteil: $b = z \sin \varphi$



Konjugiert komplexe Zahl

$$\underline{z} = a + jb \Rightarrow \underline{z}^* = a - jb$$

$$\underline{z} = z \cdot e^{j\varphi} \Rightarrow \underline{z}^* = z \cdot e^{-j\varphi}$$

Eigenschaften:

- $\underline{z} \cdot \underline{z}^* = |\underline{z}|^2 = z^2$ (reell!)
- $\operatorname{Re} \underline{z} = \frac{\underline{z} + \underline{z}^*}{2}$

Rechenregeln

Addition/Subtraktion → Komponentenform:

$$\underline{z}_1 \pm \underline{z}_2 = (a_1 \pm a_2) + j(b_1 \pm b_2)$$

Multiplikation → Polarform: Beträge multiplizieren, Phasen **addieren**:

$$\underline{z}_1 \cdot \underline{z}_2 = z_1 z_2 \cdot e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

Division → Polarform: Beträge dividieren, Phasen **subtrahieren**:

$$\frac{\underline{z}_1}{\underline{z}_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

(in Komponentenform: mit konjugiertem Nenner erweitern)

Faustregel: addieren kartesisch, multiplizieren polar!



Aufgabe 18: Komplexe Zahlen

Gegeben: $u(t) = 325 \text{ V} \cdot \cos(\omega t)$ und $i(t) = 10 \text{ A} \cdot \sin(\omega t)$

- Zeichnen Sie beide Größen als **Zeiger** im Zeigerdiagramm.
- Stellen Sie $\underline{U}$ und $\underline{I}$ in **kartesischer Form** dar.
- Wandeln Sie beide in **Polarform** um.
- Berechnen Sie $\underline{U} \cdot \underline{I}^*$ in beiden Darstellungen.
- Vergleichen Sie die Ergebnisse: Was fällt auf?